数学の出題のねらい

　数学 I・A に関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，関数について考察する能力，確率を事象の考察に活用する能力，定理を図形の計量に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

2026年度 数学 略解

第１問

問題１

$3x^2-8xy-3y^2+18x+16y-21=(x-3y+7)(3x+y-3)$

問題２

x，y の最大公約数を g とすると，x，y は次のように表される．

$$x=gx',\quad y=gy'$$

ただし，x'，y' は互いに素な自然数で，$x'<y'$である．

積が 4032 であるから，$g^2x'y'=4032$　①

最小公倍数が 336 であるから，$gx'y'=336$　②

①，②より，

$$g=12$$

よって，

$$x'y'=28$$

これを満たす x'，y' の組は

$(x',y')=(1,28),(4,7)$

したがって，

$(x,y)=(12,336),(48,84)$

問題３

40 個の値の総和は　$8\times10+12\times30=440$　である．

よって，全体の平均値は　$440\div40=11$　となる．

次に，グループ A の 10 個の値を x_1，x_2，$\cdots\cdot$，x_{10} と示し，グループ B の 30 個の値を x_{11}，x_{12}，$\cdots\cdot$，x_{40} と示すことにする．

このとき，グループ A の値の分散について，$12=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-8^2$　とおくことができるので，$(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)=760$となる．

また，グループ B の値の分散について，$16=\frac{1}{30}(x_{11}{}^2+x_{12}{}^2+\cdots+x_{40}{}^2)-12^2$　とおくことができるので，$(x_{11}{}^2+x_{12}{}^2+\cdots+x_{40}{}^2)=4800$ となる．

よって，全体の分散は，$\frac{1}{40}\left(760+4800\right)-11^2=18$　となる．

第２問

問題１

　$f(x)=3x^2+6mx+m+4$とし，方程式$f(x)=0$の判別式をDとする．異なる２つの正の実数解を持つための条件は，

（i）　$D>0$，（ii）　軸>0，（iii）$f(0)>0$，

の３つである．

（i）$D>0$から，$D=3(3m-4)(m+1)>0$　よって，$m<-1,\quad m>\frac{4}{3}$

（ii）軸>0から，$-m>0$　よって，$m<0$

（iii）$f(0)>0$から，$m+4>0$　よって，$m>-4$

（i），（ii），（iii）の共通範囲を求めて　　$-4<m<-1$

問題２

　$f(x)=3x^2+6mx+m+4$とし，方程式 $f(x)=0$の判別式をD_1とする．$g(x)=x^2+3x+m$とし，方程式 $g(x)=0$の判別式をD_2とする．一方だけが実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$と$D_2\geqq 0$の一方だけが成り立つときである．

$D_1\geqq 0$ から，$D_1=3(3m-4)(m+1)\geqq 0$ よって，$m\leqq -1,\quad m\geqq\frac{4}{3}$

$D_2\geqq 0$ から，$D_2=9-4m\geqq 0$　よって，$m\leqq\frac{9}{4}$

したがって，

$D_1\geqq 0$、$D_2\geqq 0$の一方だけが成り立つ m の範囲は，

$$m>\frac{9}{4},\qquad -1<m<\frac{4}{3}$$

第３問

問題１

緑色以外の取り出されたボールは箱に戻らないので，

$$P\left(2\text{ 番目に青}\right)=P\left(1\text{ 番目に緑，}2\text{ 番目に青}\right)+P\left(1\text{ 番目に青，}2\text{ 番目に青}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に赤，}2\text{ 番目に青}\right)+P\left(1\text{ 番目に白，}2\text{ 番目に青}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{89}{450}$$

問題２

条件付き確率の定義より

$$P\left(3\text{ 番目に緑}\mid 2\text{ 番目に青}\right)=\frac{P\left(2\text{ 番目に青，}3\text{ 番目に緑}\right)}{P\left(2\text{ 番目に青}\right)}$$

緑色以外の取り出されたボールは箱に戻らないので，

$$P\left(2\text{ 番目に青，}3\text{ 番目に緑}\right)=P\left(1\text{ 番目に緑，}2\text{ 番目に青，}3\text{ 番目に緑}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に青，}2\text{ 番目に青，}3\text{ 番目に緑}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に赤，}2\text{ 番目に青，}3\text{ 番目に緑}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に白，}2\text{ 番目に青，}3\text{ 番目に緑}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{11}{450}$$

問題 1 より，$P\left(2\text{ 番目に青}\right)=\frac{89}{450}$ なので，求める条件付き確率は

$$P\left(3\text{ 番目に緑}\mid 2\text{ 番目に青}\right)=\frac{11}{450}\div\frac{89}{450}=\frac{11}{89}$$

問題３
2 番目に引いた人がもらえるりんごの個数の期待値の計算式は，

$$10 \times P\left(2\text{ 番目に緑}\right) + 5 \times P\left(2\text{ 番目に青}\right) + 3 \times P\left(2\text{ 番目に赤}\right)$$

$$+1 \times P\left(2\text{ 番目に白}\right)$$

となる．
ここで，

$$P\left(2\text{ 番目に緑}\right) = P\left(1\text{ 番目に緑，}2\text{ 番目に緑}\right) + P\left(1\text{ 番目に青，}2\text{ 番目に緑}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に赤，}2\text{ 番目に緑}\right) + P\left(1\text{ 番目に白，}2\text{ 番目に緑}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{11}{100}$$

問題 1 より，

$$P\left(2\text{ 番目に青}\right) = \frac{89}{450}$$

$$P\left(2\text{ 番目に赤}\right) = P\left(1\text{ 番目に緑，}2\text{ 番目に赤}\right) + P\left(1\text{ 番目に青，}2\text{ 番目に赤}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に赤，}2\text{ 番目に赤}\right) + P\left(1\text{ 番目に白，}2\text{ 番目に赤}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{89}{300}$$

$$P\left(2\text{ 番目に白}\right) = P\left(1\text{ 番目に緑，}2\text{ 番目に白}\right) + P\left(1\text{ 番目に青，}2\text{ 番目に白}\right)$$

$$+P\left(1\text{ 番目に赤，}2\text{ 番目に白}\right) + P\left(1\text{ 番目に白，}2\text{ 番目に白}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{89}{225}$$

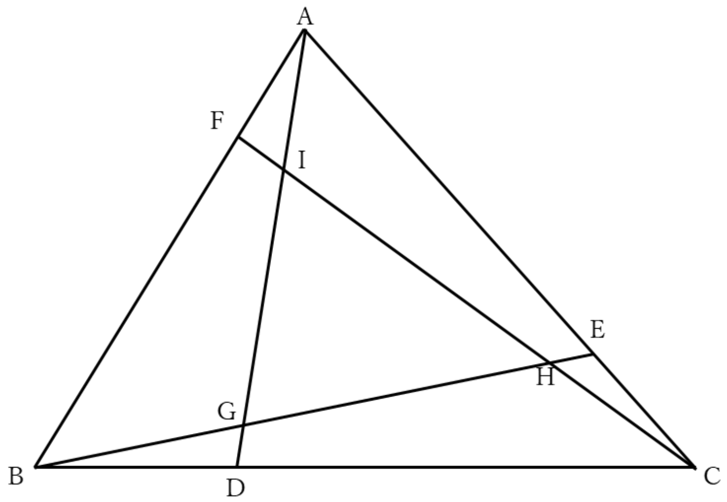
したがって，求める期待値は

$$10 \times P\left(2\text{ 番目に緑}\right) + 5 \times P\left(2\text{ 番目に青}\right) + 3 \times P\left(2\text{ 番目に赤}\right)$$

$$+1 \times P\left(2\text{ 番目に白}\right)$$

$$= 10 \times \frac{11}{100} + 5 \times \frac{89}{450} + 3 \times \frac{89}{300} + 1 \times \frac{89}{225} = \frac{3037}{900}$$

第４問



問題１

△ABC で余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{11}{21}$$

BD：DC $= 1:2$ なので，

$$\mathrm{BD} = \frac{1}{3}\mathrm{BC} = 3$$

$\cos\angle\mathrm{ABC} = \cos\angle\mathrm{ABD}$であることから，△ABD で余弦定理より，

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\cos\angle\mathrm{ABD} = 7^2 + 3^2 - 2\cdot 7\cdot 3\cdot\frac{11}{21} = 36$$

$\mathrm{AD} > 0$ なので，

$$\mathrm{AD} = \sqrt{36} = 6$$

問題２

$\triangle$ABD と線分 CF でメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{IA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

から，

$$\frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{IA}}=\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

よって，$\mathrm{IA}:\mathrm{DI}=3:5$

$\mathrm{AD}=\mathrm{DI}+\mathrm{IA}=6$ なので，

$$\mathrm{IA}=\frac{3}{8}\mathrm{AD}=\frac{9}{4}$$

次に$\triangle$ACD と線分 BE でメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=1$$

から，

$$\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GA}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

よって，$\mathrm{GA}:\mathrm{DG}=9:1$

$\mathrm{AD}=\mathrm{DG}+\mathrm{GA}=6$ なので，

$$\mathrm{GA}=\frac{9}{10}\mathrm{AD}=\frac{27}{5}$$

以上から，

$$\mathrm{GI}=\mathrm{GA}-\mathrm{IA}=\frac{63}{20}$$